Physique Générale : Mécanique

12.03 Problème résolu: Machine d'Atwood

Sections
SC, GC & SIE , BA1

Dr. J.-P. Hogge

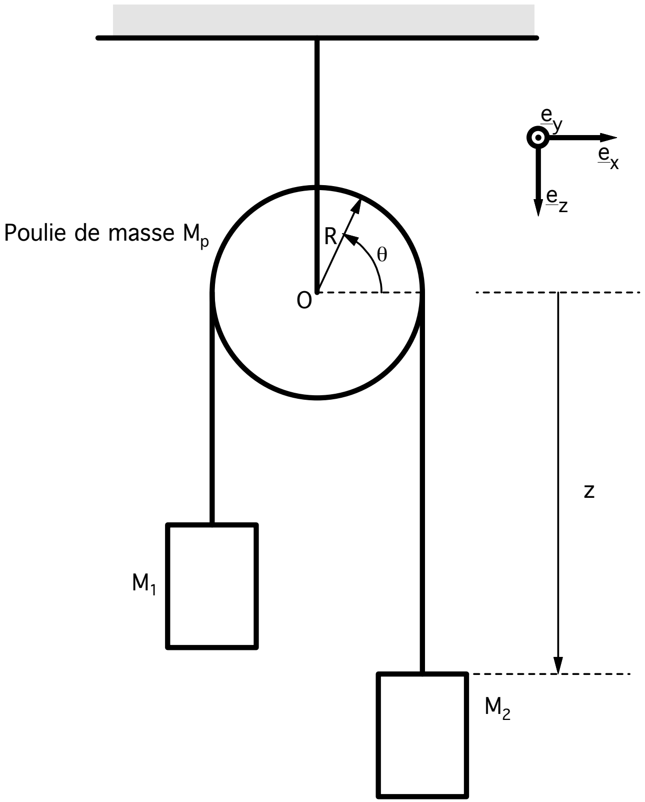
Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

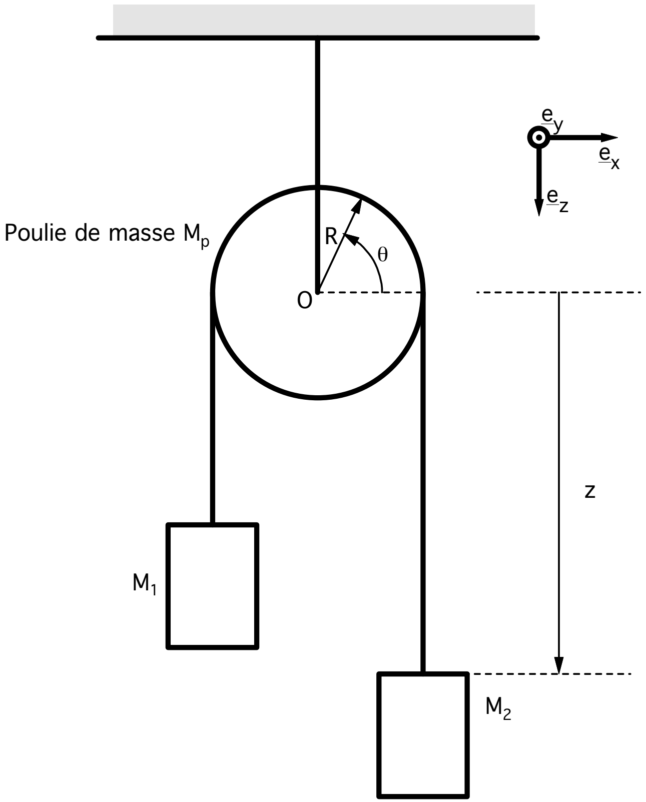
Swiss Plasma Center

Machine d'Atwood



- Une poulie de masse M_p est suspendue au plafond. Deux masses M_1 et M_2 sont reliées par une corde sans masse qui entraîne la poulie sans glisser.
- Trouver l'accélération des deux masses,
- Trouver la tension dans la corde de chaque côté de la poulie,
- Trouver la force exercée par le plafond sur la poulie.

Machine d'Atwood



- <u>Référentiel:</u>
  - Laboratoire
- <u>Système(s):</u>
  - $(M_1 + M_2 + M_p)$, ou
  - M_1 ou M_2 ou M_p
- <u>Contraintes:</u>
  - Pas de glissement

$$R\dot{\theta} = \frac{dz_1}{dt}$$

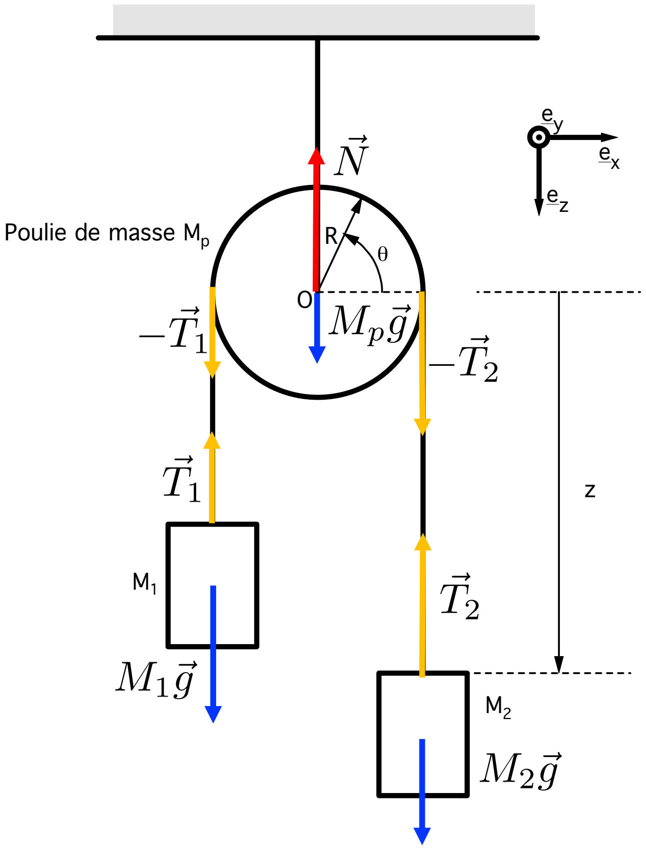
  - Corde tendue

$$z_1 + z_2 = \text{cste} \qquad \frac{dz_1}{dt} = -\frac{dz_2}{dt}$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{d^2 z_2}{dt^2}$$

- <u>Equations utilisables:</u>
  - Th. Moment cinétique, et
  - Newton
  - (Conservation énergie)

Machine d'Atwood



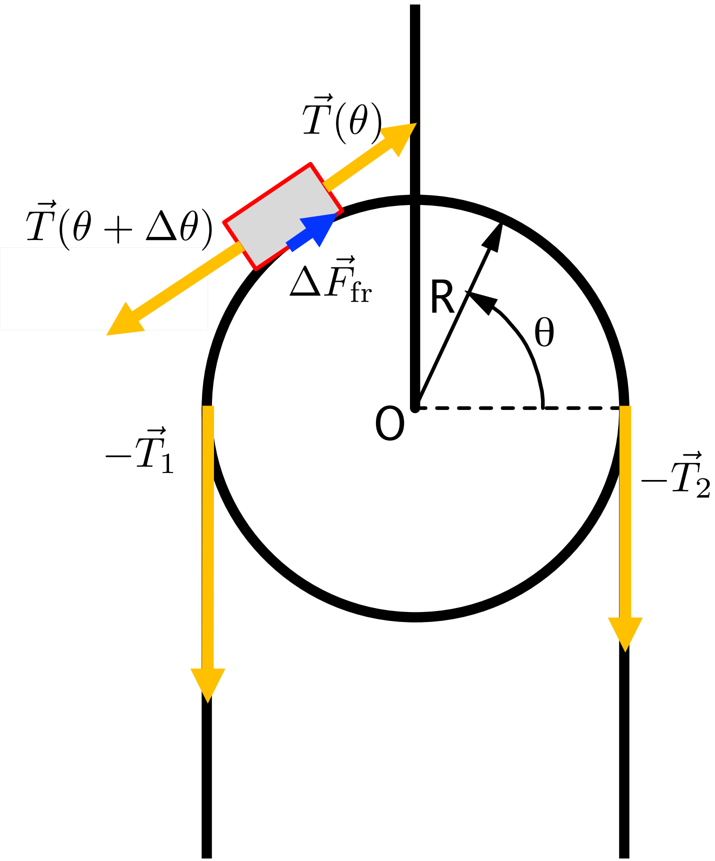
- Forces:
  - $M_1\vec{g}$, $\vec{T}_1$ sur M_1
  - $M_2\vec{g}$, $\vec{T}_2$ sur M_2
  - $-\vec{T}_1$, $-\vec{T}_2$, $M_p\vec{g}$, $\vec{N}$ sur la poulie

- Newton sur le système complet:

$$\vec{N} + M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + M_p\vec{g} = (M_1 + M_2 + M_p)\,\vec{a}_G \neq 0$$

- $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$ car le moment d'inertie I_p de la poulie est différent de zéro.

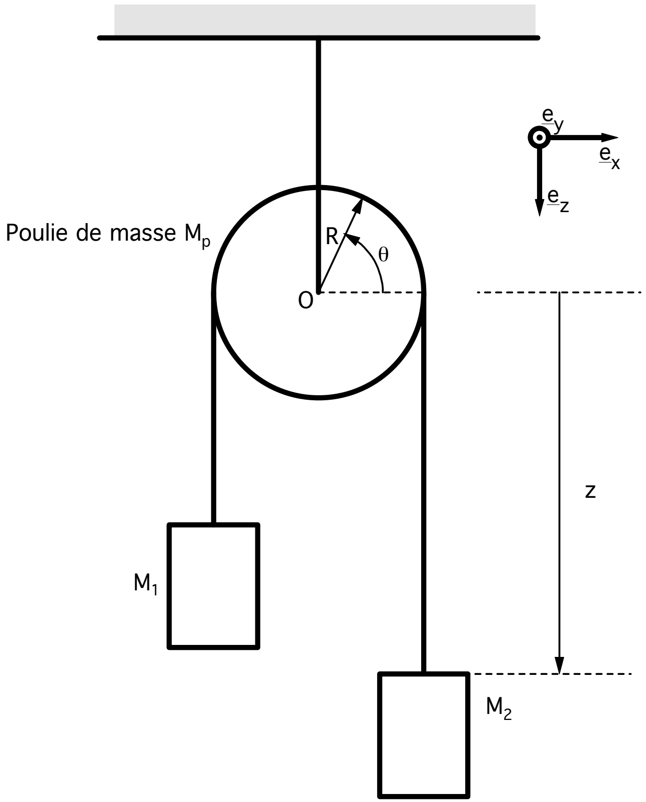
Machine d'Atwood



- La force de frottement qui s'exerce entre la poulie et la corde est responsable de la différence de tension des deux côtés de la poulie (si $M_p \neq 0$).
  On peut le voir en appliquant Newton à un élément de corde (de masse nulle).

- Le modèle est simplifié ($\vec{T}(\theta)$ et $\vec{T}(\theta + \Delta\theta)$ ne sont pas dans la même direction) , mais représentatif

Machine d’Atwood



- Moment cinétique du système complet:

$$\vec{L}_O = RM_1\frac{dz_1}{dt}\vec{e}_y - RM_2\frac{dz_2}{dt}\vec{e}_y + I_p\omega\vec{e}_y$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{dz_2}{dt} \qquad R\dot{\theta} = \frac{dz_1}{dt} = R\omega$$

$$\vec{L}_O = \left(M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)\omega R^2\vec{e}_y$$

- Moment des forces externes au système ‘ poulie + M_1 + M_2’ :

$$\vec{M}_O = (RM_1g - RM_2g)\,\vec{e}_y$$

$$\left(M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)R^2\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\ddot{\theta}} = Rg(M_1 - M_2)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\frac{(M_1 - M_2)}{\left(M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)}}$$

- On intègre 2 fois:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\frac{(M_1 - M_2)}{\left(M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{R}t^2\frac{(M_1 - M_2)}{\left(M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)} + \underbrace{\dot{\theta}(0) + \theta(0)}_{=0}}$$

- Newton sur M_1:

$$M_1 g - T_1 = M_1\frac{d^2 z_1}{dt^2} = M_1 R\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T_1 = M_1 g\left(1 - \frac{(M_1 - M_2)}{M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}}\right)}$$

- Newton sur M_2:

$$\boxed{T_2 = M_2 g\left(1 + \frac{(M_1 - M_2)}{M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}}\right)}$$

- Newton sur M_p:

$$N = T_1 + T_2 + M_p g \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N = g\left(M_1 + M_2 + M_p - \frac{(M_1 - M_2)^2}{M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R^2}}\right)}$$